Hölderの不等式の一般化とそのPrediction theoryへの応用

§1 Hölder's inequality.

X : compact Housdorff space, $C^+(X)$: X上の正値連続関数の全体.

ν : X上のBorel <u>probability</u> measure.

$-\infty < p < +\infty$, $f \in C^+(X)$

$$f\text{の}p\text{乗平均} = \|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_X f^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{if } p \neq 0 \\ \exp\left(\int_X \log f d\nu\right) & \text{if } p = 0 \end{cases}$$

<u>Theorem 1</u> (a generalization of Hölder's inequality)

$\forall -\infty < p < q < +\infty$, $\forall f \in C^+(X)$

$$\sup_{\|g\|_q = 1} \|fg\|_p = \|f\|_r$$

ただし $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ かつ p, q, いずれか0のときは $r = 0$.

<u>Remark</u> 1. $0 \neq p$, かつ $0 \neq q$ のとき Theorem 1 は ν が probability measure でなくとも成立する. ($p=0$, 又は $q=0$ のときは ν が probability measure でないと一般に成立しない)

<u>Remark</u> 2 $0 < \overset{1}{\overset{\shortparallel}{p}} < q$ のときは Theorem 1 は Hölder's inequality そのものであり, $0 < p < q$ の場合は Hölder's inequality からすぐ出ることである.

<u>Remark</u> 3, Amemiya's proof $\boxed{\text{ここでやる証明}}$ は Hölder's inequality を用いることがない. すべては Jensen's inequality による. したがって Jensen's inequality から Hölder's inequality が示されることになる. (そのような Hölder's inequality の証明は余り見かけないと思う??)

Lemma 1 (Jensen's inequality) μ : Borel prob. measure on X

$-\infty < \alpha < +\infty$

$$\begin{cases} \alpha(\alpha-1) \geqq 0 \Rightarrow & \int_X h^\alpha d\mu \geqq \left(\int_X h\, d\mu \right)^\alpha \quad \forall h \in C^+(X) \\ \alpha(\alpha-1) \leqq 0 \Rightarrow & \int_X h^\alpha d\mu \leqq \left(\int_X h\, d\mu \right)^\alpha \quad \text{〃} \end{cases}$$

Lemma 2

1) $p < q \Rightarrow \|f\|_p \leqq \|f\|_q \quad \forall f \in C^+(X)$

2) $p_n \to q \Rightarrow \|f\|_{p_n} \longrightarrow \|f\|_q \quad \forall f \in C^+(X)$

Proof : 1) は Jensen's inequality からすぐ出る. 2) は $q=0$ のときだけが non-trivial であるが Exercise Problem として適当.

1), 2) とも ν が probability measure であることを用いている.

Proof of Theorem 1

[1] $p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ とする. このとき $r \neq 0$ に注意

$\|f\|_r = 1$ として一般性を失わない. まず

$$\sup_{\|g\|_q = 1} \|fg\|_p \leqq 1 \quad \text{-------- } (*)$$

を示す.

$d\mu = f^r d\nu$ とすると $\int_X f^r d\nu = 1$ より μ は X 上の probability measure.

$\|g\|_q = 1$ すなわち $\int_X g^q d\nu = 1$ に対して

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{p}{q} \\ h &= g^q f^{-r} \end{aligned} \right\} \text{ とおくと}$$

$$\begin{cases} p<0 \Rightarrow \alpha(\alpha-1) = \dfrac{p}{q}\left(\dfrac{p}{q}-1\right) = \dfrac{p(p-q)}{q^2} > 0 \\ p>0 \Rightarrow \alpha(\alpha-1) = \dfrac{p}{q}\left(\dfrac{p}{q}-1\right) = \dfrac{p(p-q)}{q^2} < 0 \\ \displaystyle\int_X h\,d\mu = \int_X g^q f^{-r} \cdot f^r\,d\nu = \int_X g^q\,d\nu = 1 \\ \displaystyle\int_X h^\alpha\,d\mu = \int_X g^{q\alpha} \cdot f^{-\alpha r} f^r\,d\nu = \int_X g^p \cdot f^{r-\frac{pr}{q}}\,d\nu = \int_X g^p f^p\,d\nu \end{cases}$$

故に Lemma 1 より

$$\begin{cases} p<0 \Rightarrow \displaystyle\int_X g^p f^p\,d\nu \geqq 1 \Rightarrow \left(\int_X g^p f^p\,d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \\ p>0 \Rightarrow \displaystyle\int_X g^p f^p\,d\nu \leq 1 \Rightarrow \left(\int_X g^p f^p\,d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \end{cases}$$

故に $(*)$ は証明された. 次に

$$\sup_{\|g\|_q=1} \|fg\|_p \geq 1 \quad \cdots\cdots\cdots (**)$$

を示す.

$g = f^{\frac{r-p}{p}} = f^{\frac{p}{q-p}}$ とおくと

$$\int_X g^q\,d\nu = \int_X f^{\frac{rq-pq}{p}}\,d\nu = \int_X f^r\,d\nu = 1 \quad \therefore \|g\|_q = 1$$

$$\int_X f^p g^p\,d\nu = \int_X f^p \cdot f^{r-p}\,d\nu = \int_X f^r\,d\nu = 1 \quad \therefore \|fg\|_p = 1$$

よって $(**)$ が成立し, $(*)$ と $(**)$ とより [1] は証明が終る

[2] $\underline{p=0<q \text{ のとき}}$

$p_n < 0 < q$, $p_n \uparrow 0$ とする

このとき $\dfrac{1}{r_n} = \dfrac{1}{p_n} - \dfrac{1}{q}$ $(n=1,2\cdots)$ なる $\underset{\displaystyle\frac{q p_n}{q-p_n}}{\overset{\|}{r_n}}$ は $r_n \uparrow 0$ となる

すでに[1]で示したことより

$$\sup_{\|g\|_q=1} \|fg\|_{p_n} = \|f\|_{r_n}$$

故に

$$\sup_n \left[\sup_{\|g\|_q=1} \|fg\|_{p_n} \right] = \sup_n \|f\|_{r_n} \underset{\text{Lemma 2}}{=} \|f\|_0$$

$$\|$$

$$\sup_{\|g\|_q=1} \sup_n \|fg\|_{p_n} \overset{\text{Lemma 2}}{=} \sup_{\|g\|_q=1} \|fg\|_0$$

$$\therefore \sup_{\|g\|_q=1} \|fg\|_0 = \|f\|_0$$

[3] $p < q = 0$ のとき.

$q_n > 0$, $q_n \downarrow 0$ とする

このとき $\dfrac{1}{r_n} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q_n}$ なる r_n は $\overset{\displaystyle\frac{q_n p}{q_n - p}}{\overset{\|}{r_n}} \uparrow 0$ となる

$$\|f\|_0 \overset{\text{Lema 2}}{=} \sup_n \|f\|_{r_n} \overset{[1]}{=} \sup_n \sup_{\|g\|_{q_n}=1} \|fg\|_p$$

$$= \sup_n \sup_{g \in C^{-1}(X)} \frac{\|fg\|_p}{\|g\|_{q_n}}$$

$$= \sup_{g \in C^{-1}(X)} \sup_n \frac{\|fg\|_p}{\|g\|_{q_n}} \overset{\text{Lemma 2}}{=} \sup_{g \in C^{-1}(X)} \frac{\|fg\|_p}{\|g\|_0}$$

$$= \sup_{\|g\|_0=1} \|fg\|_p$$

Q. E. D.

Theorem 2 $\forall\, -\infty < q < p < +\infty$, $f \in C^{+}(X)$

$$\inf_{\|g\|_q = 1} \| f g \|_p = \| f \|_r ,$$

where $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$, p, q のいづれかが 0 のときは r は 0 とする

Proof $\| f \|_{-p} = \| f^{-1} \|_p^{-1}$ $\left(f \in C^{+}(X) \right)$ に注意して

$$\left(\inf_{\|g\|_q = 1} \| f g \|_p \right)^{-1} = \sup_{\|g\|_q = 1} \| f g \|_p^{-1} = \sup_{\|g\|_q = 1} \| f^{-1} g^{-1} \|_{-p}$$

$$= \sup_{\|g^{-1}\|_{-q} = 1} \| f^{-1} g^{-1} \|_{-p} = \sup_{\|g\|_{-q} = 1} \| f^{-1} g \|_{-p}$$

$$\overset{\text{Theorem 1}}{=} \| f^{-1} \|_{-r} = \| f \|_r^{-1}$$

$$\therefore \inf_{\|g\|_q = 1} \| f g \|_p = \| f \|_r$$

Q.E.D.

Remark $p = q$ のとき

$$\begin{cases} \displaystyle\sup_{\|g\|_p = 1} \| f g \|_p = \underset{\nu \text{ の Support}}{\mathrm{Max}}\, f \\ \displaystyle\inf_{\|g\|_p = 1} \| f g \|_p = \underset{\nu \text{ の support}}{\mathrm{Min}}\, f \end{cases}$$

§2 Prediction Theory への応用のための準備

μ を X 上の non-negative finite Borel measure とし，ν にかんする

分解を $\quad d\mu(x) = w(x)\,d\nu(x) + d\mu_s(x) \quad$ とする.

Theorem 3 $\quad -\infty < q < p,\ 0 < p$ に対して

Remark $\quad -\infty < \dfrac{q}{q-p} < 1$

$$\inf_{\|g\|_q = 1} \int_X g^p\,d\mu = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X w^{\frac{q}{q-p}}\,d\nu \right)^{\frac{q-p}{q}} & (q \neq 0) \\[2ex] \exp\left(\displaystyle\int_X \log w\,d\nu \right) & (q = 0) \end{cases}$$

Proof $\quad q \neq 0$ のときだけを証明する. $q = 0$ のときも全く同様である.

X 上の Borel measurable で，$0 < \mathrm{Min}\,\xi \le \mathrm{Max}\,\xi < +\infty$ なる関数 ξ の全体を $B^+(X)$ で示す

[1] $$\inf_{\substack{\|g\|_q = 1 \\ g \in C^+(X)}} \int_X g^p\,d\mu = \inf_{\substack{\|\xi\|_q = 1 \\ \xi \in B^+(X)}} \int \xi^p\,d\mu$$

$\because$) $\displaystyle\int_X \xi^q\,d\nu = 1$ なる $\xi \in B^+(X)$ に対して $g \in C^+(X)$ が存在して

$$\int_X g^q\,d\nu = 1 \quad \text{かつ} \quad \int_X g^p\,d\mu \fallingdotseq \int_X \xi^p\,d\mu$$

と出来ることを示せばよい. まず X の compact subset K がとれて

$$\mu(X \setminus K) \fallingdotseq 0 \ \text{かつ}\ \nu(X \setminus K) \fallingdotseq 0, \qquad \xi|_K \text{ は } K \text{ 上連続となる}$$

$\xi|_K$ の連続拡大 $h \in C^+(X)$ をとると

$$\int_X h^q\,d\nu \fallingdotseq \int_X \xi^q\,d\nu = 1$$

かつ
$$\int_X h^p\,d\mu \fallingdotseq \int_X \xi^p\,d\mu$$

$g = \dfrac{1}{a^{1/q}}\,h$ とおく，ただし $\quad a = \displaystyle\int_X h^q\,d\nu \fallingdotseq 1$

$$\int_X g^q\,d\nu = 1 \quad \text{かつ} \quad \int_X g^p\,d\mu = a^{-\frac{p}{q}} \int_X h^p\,d\mu \fallingdotseq a^{-\frac{p}{q}} \int_X \xi^p\,d\mu \fallingdotseq \int_X \xi^p\,d\mu.$$

[2] $$\inf_{\substack{\|g\|_q=1\\ g\in C^+(X)}} \int_X g^p\,d\mu = \inf_{\|g\|_q=1} \int_X g^p w\,d\nu$$

∵) $\int_X g^p w\,d\nu$, $\int g^q d\nu=1$ $g\in C^+(X)$ に対して, $\xi\in B^+(X)$ で

$$\int_X \xi^q\,d\nu = 1 \quad \text{かつ} \quad \int_X \xi^p\,d\mu \doteqdot \int_X g^p w\,d\nu$$

を示せば [1] より [2] が成立することがわかる.

X を Borel set A, B に分解して : $X = A\cup B$

$$\mu_s(A) = 0 \quad \text{かつ} \quad \nu(B) = 0$$

$$\xi(x) = \begin{cases} g(x) & (x\in A) \\ \varepsilon & (x\in B) \end{cases}$$ $\varepsilon>0$ は十分小さいものとする

$$\int_X \xi^q\,d\nu = \int_A \xi^q\,d\nu = \int_A g^q\,d\nu = \int_X g^q\,d\nu = 1$$

$$\int_X \xi^p\,d\mu = \int_A g^p\,d\mu + \varepsilon^p \underset{\mu_s(B)}{\underset{\|}{\mu(B)}} = \int_A g^p w\,d\nu + \int_A g^p\,d\mu_s + \varepsilon^p\mu_s(B)$$

$$= \int_X g^p w\,d\nu + \varepsilon^p\mu_s(X) \doteqdot \int_X \xi^p\,d\mu$$

[3] w が有界のとき, $$\inf_{\|g\|_q=1} \int_X g^p w\,d\nu = \left(\int_X w^{\frac{q-p}{q}}\,d\nu\right)^{\frac{q}{q-p}}$$

∵) w が上に有界 $\exists\, f_n\in C^+(X)$ $(n=1,2\cdots)$

$f_n \downarrow w$ a.e. with respect to ν

$$\inf_{\|g\|_q=1} \int_X g^p w\,d\nu = \inf_{\|g\|_q=1} \inf_n \int_X g^p f_n\,d\nu$$

$$= \inf_n \inf_{\|g\|_q=1} \int_X g^p f_n\,d\nu$$

Theorem 2 と $p>0$

$$\overset{\downarrow}{=} \inf_n \left\|f_n^{\frac{r}{p}}\right\|_r^{p} = \inf_n \left(\int_X f_n^{\frac{r}{p}}\,d\nu\right)^{\frac{p}{r}} = \inf_n\left(\int_X f_n^{\cancel{\frac{q}{p}}\,\frac{q}{q-p}}\,d\nu\right)^{\cancel{\frac{q}{q-p}}\,\frac{q-p}{q}}$$

$$= \left(\int_X w^{\cancel{\frac{q}{p}}\,\frac{q}{q-p}}\,d\nu\right)^{\cancel{\frac{q}{q-p}}\,\frac{q-p}{q}}$$

[4] W が非有界のときの $\inf_{\|g\|_q=1} \int_X g^p W\,d\nu = \left(\int_X W^{\frac{q}{q-p}} d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}}$

$\because$) $\exists$ a sequence of Borel sets $A_n \uparrow X$ such that W is bounded on every A_n. $W_n = W|_{A_n} = W\chi_{A_n}$ $(n=1,2\cdots)$ とおく.

$\forall\, n=1,2,\cdots$

$$\inf_{\|g\|_q=1} \int_X g^p W\,d\nu \geqq \inf_{\|g\|_q=1} \int_X g^p W_n\,d\nu \overset{[3]より}{=\!=} \left(\int_X W_n^{\frac{q}{q-p}} d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

Let $n\to\infty$,

$$\inf_{\|g\|_q \geqq 1} \int_X g^p W\,d\nu \geqq \left(\int_X W^{\frac{q}{q-p}} d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}} \quad \cdots\cdots (*)$$

逆の不等式を示す.

$\nu_n = \frac{1}{\nu(A_n)} \nu|_{A_n}$ $(n=1,2\cdots)$ とおく. ν_n は X 上の probability measure である.

まず すべての $n=1,2\cdots$

ⓐ $$\inf_{\int_X g^q d\nu_n=1} \int_X g^p W\,d\nu_n = \inf_{\int g^q d\nu_n=1} \int_X g^p W_n\,d\nu_n \overset{[3]}{=\!=} \left(\frac{1}{\nu(A_n)}\int_X W_n^{\frac{q}{q-p}} d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

ⓑ $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\nu(A_n)}\int_X W_n^{\frac{q}{q-p}} d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}} = \left(\int_X W^{\frac{q}{q-p}} d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

ⓑより $\exists\, n_0$

ⓒ $$\varepsilon + \left(\int_X W^{\frac{q}{q-p}} d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}} \geq \left(\frac{1}{\nu(A_{n_0})}\int_X W_{n_0}^{\frac{q}{q-p}} d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

この n_0 に対して ⓐより $\exists\, g_0 \in C^+(X)$

ⓓ $$1 = \int_X g_0^q\,d\nu_{n_0} \quad かつ \quad \varepsilon + \left(\frac{1}{\nu(A_{n_0})}\int_X W_{n_0}^{\frac{q}{q-p}} d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}} \geq \int_X g_0^p W_{n_0}\,d\nu_{n_0}$$

$$\xi_0(x) = \begin{cases} g_0(x) & x \in A_{n_0} \\ 1 & x \in X\setminus A_{n_0} \end{cases}$$ とおくと $\xi_0 \in B^+(X)$

このとき

$$\int_X \xi_0^q\,d\nu = \int_{A_{n_0}} g_0^q\,d\nu + \nu(X\setminus A_{n_0}) = \nu(A_{n_0}) + \nu(X\setminus A_{n_0}) = 1$$

$$\int_X \xi_0^p w\,d\nu = \int_{A_{n_0}} g_0^p w_{n_0}\,d\nu + \int_{X \setminus A_{n_0}} w\,d\nu$$

$$= \nu(A_{n_0}) \int_X g_0^p w_{n_0}\,d\nu_{n_0} + \int_{X \setminus A_{n_0}} w\,d\nu$$

$$\overset{\text{ⓒ and ⓓ}}{\le} \nu(A_0)\left[2\varepsilon + \left(\int_X w^{\frac{q}{q-p}}\,d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}}\right] + \int_{X \setminus A_{n_0}} w\,d\nu$$

$$\le 2\varepsilon + \left(\int_X w^{\frac{q}{q-p}}\,d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}} + \int_{X \setminus A_{n_0}} w\,d\nu \le 3\varepsilon + \left(\int_X w^{\frac{q}{q-p}}\,d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

故に

$$\inf_{\|\xi\|_q = 1} \int_X \xi^p w\,d\nu \le \int_X \xi_0^p w\,d\nu \le 3\varepsilon + \left(\int_X w^{\frac{q}{q-p}}\,d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

[1] を用いて

$$\inf_{\substack{\|g\|_q = 1 \\ g \in C^+(X)}} \int_X g^p w\,d\nu \overset{[1]}{=} \inf_{\substack{\|\xi\|_q = 1 \\ \xi \in B^+(X)}} \int_X \xi^p w\,d\nu \le 3\varepsilon + \left(\int_X w^{\frac{q}{q-p}}\,d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

Let $\varepsilon \to 0$

$$\inf_{\|g\|_q = 1} \int_X g^p w\,d\nu \le \left(\int_X w^{\frac{q}{q-p}}\,d\nu\right)^{\frac{q-p}{q}} \quad \text{------} (**)$$

Q. E. D.

(*) と (**) とより [4] の証明は終る.

§3 Interpolation Theorem and Extrapolation Theorem

単位円周 $[0, 2\pi)$ 上の non-negative finite measure を μ とし，μ の $\frac{1}{2\pi}d\theta$ に対する分解を $d\mu(\theta) = W(\theta)\, d\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) + d\mu_s(\theta)$ とする.

更に $Q(\theta)$ で trigonometric polynomial $\sum_{|k|\le n} c_k e^{ik\theta}$ を，$P(\theta)$ で analytic trigonometric polynomial $\sum_{0\le k\le n} c_k e^{ik\theta}$ をあらわすこととする.

Theorem 4

I) $\forall p>1$

$$\inf_{\int_0^{2\pi} Q(\theta)d\theta=0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+Q(\theta)|^p d\mu(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(\theta)^{\frac{1}{1-p}} d\theta\right)^{1-p}$$

---- interpolation (Kolmogorov)

E) $\forall p>0$

$$\inf_{\int_0^{2\pi} P(\theta)d\theta=0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+P(\theta)|^p d\mu(\theta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log W(\theta)\, d\theta\right)$$

---- extrapolation (Szegö)

Proof

I) の場合　Theorem 3 で $q = 1 < p$ とおくと

$$\inf_{\substack{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta=1 \\ g\in C^+([0,2\pi))}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)^p d\mu(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(\theta)^{\frac{1}{1-p}} d\theta\right)^{1-p}$$

$$\|$$

$$\inf_{\substack{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta \ge 1 \\ \varphi\ge 0,\ \text{continuous}}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)^p d\mu(\theta)$$

$$\|$$

$$\inf_{\int_0^{2\pi} Q(\theta)d\theta=0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+Q(\theta)|^p d\mu(\theta)$$

(E)の場合　Theorem 3 で $q=0<p$ とおいて

$$\inf_{\substack{\int_0^{2\pi}\log g(\theta)d\theta=0 \\ g\in C^{+}([0,2\pi))}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)^p d\mu(\theta) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log w(\theta)d\theta\right)$$ が成立する

$$\Big\| \leftarrow (*)$$

$$\inf_{\int_0^{2\pi}P(\theta)d\theta=0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+P(\theta)|^p d\mu(\theta)$$

等号(*)は次の三段階による.

[1] $$\inf_{\int_0^{2\pi}\log g(\theta)d\theta=0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)^p d\mu(\theta) = \inf_{\substack{\int_0^{2\pi}\log\varphi(\theta)d\theta\geq 0 \\ \varphi\geq 0\ \text{cont.}}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)^p d\mu(\theta)$$

∵) $\geq$ は明らか. 逆に, $\varphi\geq 0$, φ, continuous で $\int_0^{2\pi}\log\varphi(\theta)d\theta\geq 0$ とする

$a_\varepsilon = \int_0^{2\pi}\log(\varphi(\theta)+\varepsilon)d\theta \geq \int_0^{2\pi}\log\varphi(\theta)d\theta$ とおくと

$g_\varepsilon(\theta) = e^{-a_\varepsilon}(\varphi(\theta)+\varepsilon)$ は $C^{+}([0,2\pi))$ の関数で $\int_0^{2\pi}\log g_\varepsilon(\theta)d\theta=0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_\varepsilon(\theta)^p d\mu(\theta) = \frac{e^{-pa_\varepsilon}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi(\theta)+\varepsilon)^p d\mu(\theta) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi(\theta)+\varepsilon)^p d\mu(\theta)$$

故に ε が十分小さくとれば

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi(\theta)+\varepsilon)^p d\mu(\theta) \fallingdotseq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)^p d\mu(\theta)$$

(証明すべき等式の)

故に $\leq$ 向の不等号が成立する.

[2] $g\in C^{+}([0,2\pi))$, $\int_0^{2\pi}\log g(\theta)d\theta=0 \Longrightarrow$ analytic polynomial $P(\theta)$ がとれて

$$\int_0^{2\pi}P(\theta)d\theta=0 \quad \text{で} \quad g(\theta)\fallingdotseq|1+P(\theta)|$$

∵) $\varphi(\theta)=\log g(\theta)$ とおくと　$g(\theta)=e^{\varphi(\theta)}$ で $\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta=0$

$\varphi(\theta)$ を real trigonometric polynomial で一様近似することにより, analytic polynomial P_1 がとれて

$$\int_0^{2\pi}P_1(\theta)d\theta=0 \quad \text{かつ} \quad \varphi(\theta)\fallingdotseq \operatorname{Re}P_1(\theta)$$

故に
$$g(\theta) \doteqdot e^{\mathrm{Re}\, P_1(\theta)} = |e^{P_1(\theta)}| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_1(\theta)^n}{n!}\right|$$
$$= \left|1 + \sum_{n\geq 1} \frac{P_1(\theta)^n}{n!}\right| \doteqdot |1 + P(\theta)|$$

十分 N を大きくとり $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{P_1(\theta)^n}{n!} = P(\theta)$ とおけば $P(\theta)$ は analytic $\overset{\text{trigonometric}}{\text{polynomial}}$ で $\int_0^{2\pi} P(\theta)\,d\theta = 0$ かつ $g(\theta) \doteqdot |1 + P(\theta)|$

[3] $P(\theta)$ を analytic $\overset{\text{trigonometric}}{\text{polynomial}}$ で $\int_0^{2\pi} P(\theta)\,d\theta = 0$
$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} \log|1 + P(\theta)|\,d\theta \geqq 0$$

∵) 定理 3 で $\varrho = 0 < \rho = 1$ とおくと
$$\inf_{\substack{\int_0^{2\pi}\log g(\theta)d\theta = 0 \\ g \in C([0,2\pi))}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)|1+P(\theta)|\,d\theta = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|1+P(\theta)|\,d\theta\right)$$

[2] を用いて $g(\theta)$ は $|1 + P_1(\theta)|$ なる関数で近似(一様)出来る
ここに P_1 は analytic trig. polynomial で $\int_0^{2\pi} P_1(\theta)\,d\theta = 0$

故に
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)|1+P(\theta)|\,d\theta \doteqdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1+P_1(\theta)||1+P(\theta)|\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1 + P_1(\theta) + P(\theta) + P_1(\theta)P(\theta)|\,d\theta \geqq 1$$

故に $\displaystyle\inf_{\int_0^{2\pi}\log g(\theta)d\theta=0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)|1+P(\theta)|\,d\theta \geqq 1$, 故に $\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|1+P(\theta)|\,d\theta\right) \geqq 1$

したがって $\int_0^{2\pi}\log|1+P(\theta)|\,d\theta \geqq 0$

証明

$$\inf \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)^p\,d\mu(\theta) \overset{[2]}{\geqq} \inf_{\int P(\theta)d\theta=0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1+P(\theta)|^p\,d\mu(\theta) \overset{[3]}{\geqq} \inf_{\substack{\int_0^{2\pi}\log\varphi(\theta)d\theta \geqq 0 \\ \varphi \geqq 0 \text{ cont}}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)^p\,d\mu(\theta)$$
$$\overset{[1]}{\geqq} \inf_{g} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)^p\,d\mu(\theta).$$